OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA
18.02.2012
Clasa a V-a

BAREM DE EVALUARE

Subiectul I

Verificati daca numarul a = 2^{20} {11^2 : 121+3 [$(3^5 \cdot 2^3)^{10}$: $(6^{30} \cdot 3^{19})$ – 2012^0]} – 7 este divizibil cu 7 si cu 5

Rezolvare:	barem
$(3^5 \cdot 2^3)^{10} = 3^{50} \cdot 2^{30}$	1p
$6^{30} \cdot 3^{19} = 2^{30} \cdot 3^{30} \cdot 3^{19} = 3^{49} \cdot 2^{30}$	1p
$(3^{50} \cdot 2^{30}) : (3^{49} \cdot 2^{30}) = 3$	1p
$2^{20}[11^2:121 + 3(3-1)] - 7 = 2^{20} \cdot 7 - 7 =$	1p
$=7(2^{20}-1)$ deci se divide cu 7	1p
$u(2^{20}) = 6$,	1p
$u(2^{20}-1)=5$, $u(a) = 5$ deci se divide cu 5	1p

Subiectul II

Se dau multimile : $A=\{x \in N^* | 2x \leq 8\}$,

$B=\{x \in N^* | x=2^{n-1}, n \in A\}$,

$C=\{x \in N | x= m - n, m \in B, n \in A, m>n\}$

a) determina multimile A, B si C

b) afla multimea $A \cap B \cap C$

c) stabileste valoarea de adevar a propozitiei:“multimea $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$ contine numai numere consecutive.”

Rezolvare:

$2x \leq 8$ si $x \in N^* \Rightarrow A = \{1,2,3,4\}$ 1p

$x=2^{n-1}$, $n \in A \Rightarrow B = \{1,2,4,8\}$ 1p

Probleme propuse şi selectate de prof. Gînța Vasile, prof. Bonta Patricia, prof.Suciu Nicolae Sorin si traduse de prof. Bálint Attila Sándor

$x = m - n$, $m \in B$, $n \in A$, $m > n \Rightarrow C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ 1p

$A \cap B \cap C = \{1,2,4\} \cap C = \{1,2,4\}$ 1p

$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 1p

$A \cup B \cup C - A \cap B \cap C = \{3,5,6,7,8\}$ 1p

Propozitia este FALSA 1p

Subiectul III

Un număr de trei cifre are primele doua cifre identice, iar a treia cifră este 5.Acest număr se împarte la un număr de o cifră şi se obține restul 8. Să se găsească deîmpărțitul, împărțitorul şi câtul.

Solutie

$\overline{aa5} = b \cdot c + 8$, 8<b, b cifra $\Rightarrow b = 9$ (impartitorul)..2p

$110a + 5 = 9c + 8$ 1p

110a=3(3c+1) 1p

$a \in \{3,6,9\}$ 1p

c = 73 (catul)...1p

$\overline{aa5} = 665$ (deimpartitul) 1p

Subiectul IV

Fiecare element al mulțimii $A = \{1;2;3;...;98;99;100\}$ se colorează cu una din culorile roşu, galben şi albastru, respectând următoarele reguli:
i) suma dintre orice număr galben şi orice număr albastru este divizibilă cu 3;
ii) suma oricăror două numere roşii este divizibilă cu 3.

a) Să se arate că numărul 3 este roşu.
b) Să se calculeze suma tuturor numerelor care nu sunt roşii.

Rezolvare:

a) Dacă, prin absurd, numărul 3 nu ar fi roşu, atunci el ar fi galben sau albastru………..1p

Dacă 3 ar fi galben, atunci, din condiția i) deducem că numerele 6, 9, 12, ..., 99 sunt galbene sau albastre, iar celelalte numere: 1, 2, 4, 5, 7, 8, ..., 97, 98 sunt roşii. Cum $1 + 4 = 5$ care nu este multiplu de 3, se contrazice condiția ii).

Dacă 3 ar fi albastru, printr-un raționament asemănător, obținem din nou contradicție.

In concluzie, numărul 3 este roşu..2p

b) Din a) rezultă că toate numerele: 3, 6, 9, ..., 93, 96, 99 sunt roşii. In plus, acestea sunt singurele numere roşii, deoarece, în caz contrar, dacă un număr nedivizibil cu 3 ar fi roşu, atunci s-ar contrazice condiția ii). 2p

Suma numerelor care nu sunt roşii este aşadar:

Probleme propuse şi selectate de prof. Gînța Vasile, prof. Bonta Patricia, prof.Suciu Nicolae Sorin si traduse de prof. Bálint Attila Sándor

$$S=(1+2+...+100)-(3+6+...+99)=$$
$$=(1+2+...+100)-3(1+2+...+33)=$$
$$=\frac{100\cdot 101}{2}-3\cdot\frac{33\cdot 34}{2}=3367.$$

....2p